Sinds november zitten dertig leerlingen in een olympiadetrainingsgroep: zij worden klaargestoomd om de competitie te kunnen aangaan met andere landen bij drie internationale wedstrijden, waaronder de Internationale Wiskunde Olympiade, komende zomer in Colombia. De deelnemers aan deze trainingsgroep zijn degenen die het hoogst hebben gescoord bij de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. We bekijken in dit artikel een opgave uit die finale.

■ door Quintijn Puite

BLAUWE VAKJES VERDELEN, MAAR WEL EERLIJK!

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Opgave 2 van de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2012 ging over een $n \times n$-bord. De kolommen daarvan zijn genummerd van 1 tot en met n. In elk vakje van het bord mag je een getal zetten, op zo'n manier dat in elke rij en in elke kolom precies de getallen 1 tot en met n staan. Daarna ga je van elk vakje na of het getal in dat vakje groter is dan het nummer van de kolom waarin het vakje zit. Zo ja, dan kleur je zo'n vakje blauw.

De vraag was nu als volgt. Stel dat $n = 5$. Kun je de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden? En hoe zit het als $n = 10$?

Dit zijn twee echte onderzoeksvragen; je weet van tevoren niet of het antwoord 'ja' of 'nee' is. En een gokje wagen is er ook niet bij: bij het antwoord 'ja' wordt een onderbouwing verlangd, bijvoorbeeld door een voorbeeld te geven. En zeg je 'nee', dan moet je juist uitleggen waaróm het niet kan.

EEN VOORBEELDJE De meeste deelnemers zijn maar eens begonnen om een voorbeeldje uit te proberen. Gewoon een 5 × 5-bord tekenen, en dat min of meer als een sudoku invullen, en dan hopen dat je steeds evenveel blauwe hokjes per rij hebt. Je mag daarbij wel aannemen dat in de eerste kolom de getallen 1 tot en met 5 in die volgorde staan, want als dat niet zo was geweest, had je rijen altijd kunnen omwisselen zodat je toch in deze situatie belandt.

1	2	3	4	5	
1	2	4	3	5	→ 1
2	1	5	4	3	→ 2
3	4	1	5	2	→ 3
4	5	3	2	1	→ 2
5	3	2	1	4	→ 2

In elke rij en in elke kolom staan nu de getallen 1 tot en 5. We hebben ook de vakjes blauw gekleurd als het getal in dat vakje groter is dan het nummer van de kolom waar het vakje in zit. Dat levert per rij het aangegeven aantal blauwe vakjes. Dat moeten er evenveel per rij zijn; poging mislukt.

PER KOLOM KIJKEN We doen gewoon nog een poging. We proberen nu eens een regelmatige manier:

1	2	3	4	5	
1	2	3	4	5	→ 0
2	3	4	5	1	→ 4
3	4	5	1	2	→ 3
4	5	1	2	3	→ 2
5	1	2	3	4	→ 1

Dat ziet er nog minder goed uit. Maar we zien wel wat interessants: in kolom 1 zijn vier vakjes blauw, in kolom 2 zijn er drie blauw, et cetera. En bij nader inzien blijkt dit ook in het eerste voorbeeld zo te zijn. Kunnen we dat verklaren? Ja, want in kolom 1 zijn er vier vakjes met een getal groter dan 1 (namelijk 2, 3, 4, 5); in kolom 2 zijn er drie vakjes met een getal groter dan 2 (namelijk 3, 4, 5); et cetera. We weten dus dat er hoe dan ook 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10 blauwe vakjes zijn. Deze willen we eerlijk verdelen over vijf rijen. Dus wil het überhaupt lukken om in elke rij evenveel blauwe vakjes te krijgen, dan moet dat wel om twee blauwe vakjes per rij gaan.

We zouden het eens kunnen omkeren: eerst proberen de blauwe vakjes goed neer te zetten: twee per rij en tegelijkertijd vier in kolom 1, drie in kolom 2, twee in kolom 3 en één in kolom 4 (en nul in kolom 5). En als dat gelukt is, proberen de getallen hier op een goede manier in te vullen, dus met de hoogste getallen per kolom in de blauwe vakjes, en met per kolom en per rij de getallen 1 tot en met 5. Met deze strategie blijken we inderdaad met een beetje proberen wel een oplossing te kunnen vinden. Er is zelfs (toch nog) een heel mooie regelmatige oplossing:

1	2	3	4	5	
1	5	4	3	2	→ 2
2	1	5	4	3	→ 2
3	2	1	5	4	→ 2
4	3	2	1	5	→ 2
5	4	3	2	1	→ 2

Met zo'n voorbeeld van een goed ingevuld bord met twee blauwe vakjes per rij hebben we laten zien dat het antwoord op de eerste vraag dus onomstotelijk 'ja' is.

NOG ZO'N VRAAG Het geval $n = 10$ is niet heel anders, denk je wellicht. Misschien kunnen we het beste het laatste voorbeeld nadoen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	→ 4
2	1	10	9	8	7	6	5	4	3	→ 5
3	2	1	10	9	8	7	6	5	4	→ 4
4	3	2	1	10	9	8	7	6	5	→ 5

Na vier rijen kunnen we wel stoppen, want dit gaat hopeloos mis. In de ene rij zitten vier blauwe vakjes, maar in de andere rij vijf. Toch bewijst dit nog niet dat het voor $n = 10$ niet lukken kan. Misschien is er een andere manier die juist wel lukt.

Hoe dan ook, elke manier om het bord te vullen met de getallen 1 tot en met 10 in elke kolom, heeft in kolom 1 negen blauwe vakjes, in kolom 2 acht, et cetera, volgens een zelfde soort argument als we eerder al zagen. Dat zijn er in totaal dus 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 45. We moeten dus proberen om 45 blauwe vakjes eerlijk over tien rijen te verdelen. Maar dat lukt alleen als het aantal blauwe vakjes een tienvoud is! Omdat het aantal blauwe vakjes in ons geval 45 is, wat niet deelbaar is door 10, weten we nu dus zeker dat er geen manier is om een 10 × 10-bord te vinden dat voldoet. Klaar!

GENERALISATIE Waarom kan het bord nou wel voor $n = 5$ en niet voor $n = 10$ worden ingevuld? Wat zit daar achter? Laten we de vraag eens voor willekeurige n proberen te beantwoorden. Voor elke n kunnen we dus een ander antwoord krijgen. Allereerst weten we dat in kolom 1 de vakjes 2 tot en met n blauw worden; dat zijn er $n - 1$. In kolom 2 gaat het om de vakjes 3 tot en met n; dat zijn er $n - 2$. Et cetera. Het aantal blauwe vakjes is dus $(n - 1) + (n - 2) + \cdots + 3 + 2 + 1 + 0$. Hier staan n getallen die gemiddeld $\frac{1}{2}(n - 1)$ zijn. De som is dus $\frac{1}{2}n(n - 1)$. Als we dit aantal blauwe vakjes eerlijk over de n rijen willen verdelen, komen er dus

$\frac{1}{2}(n-1)$ per rij. Voor even waarden van n is dit niet geheel, wat aantoont dat voor even n het vierkant nooit op de gewenste manier in te vullen is. Het resultaat dat we hierboven voor $n = 10$ vonden, hebben we hiermee dus gegeneraliseerd voor álle even waarden van n.

Voor oneven waarden van n zijn de voortekens beter: $\frac{1}{2}(n-1)$ is dan in ieder geval een geheel getal. Maar dat hoeft nog niet te betekenen dat het voor elke oneven n ook echt mogelijk is om deze goed in te vullen; er zouden nog andere redenen kunnen zijn waarom het niet kan. We moeten daarom nog laten zien dat voor oneven n het echt mogelijk is de vakjes goed in te vullen met $\frac{1}{2}(n-1)$ vakjes per rij.

Bekijk hiertoe weer de regelmatige invulling die we eerder voor $n = 5$ vonden. Werkt dat bijvoorbeeld ook voor $n = 11$? Dit gaat inderdaad goed; we zien per rij precies steeds $\frac{1}{2}(n-1) = 5$ blauwe vakjes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	→ 0+5=5
2	1	11	10	9	8	7	6	5	4	3	→ 1+4=5
3	2	1	11	10	9	8	7	6	5	4	→ 1+4=5
4	3	2	1	11	10	9	8	7	6	5	→ 2+3=5
5	4	3	2	1	11	10	9	8	7	6	→ 2+3=5
6	5	4	3	2	1	11	10	9	8	7	→ 3+2=5
7	6	5	4	3	2	1	11	10	9	8	→ 3+2=5
8	7	6	5	4	3	2	1	11	10	9	→ 4+1=5
9	8	7	6	5	4	3	2	1	11	10	→ 4+1=5
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	11	→ 5+0=5
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	→ 5+0=5

Hoe zit dat nou voor algemene oneven n? Het is de kunst om eerst onder woorden te brengen hoe die regelmatige invulling eigenlijk gemaakt is. Op rij k plaatsen we in de eerste k vakjes de getallen 1 tot en met k, maar dan in aflopende volgorde. En in de laatste $n - k$ vakjes plaatsen we juist de getallen $k + 1$ tot en met n, wederom in aflopende volgorde. Dus in kolom $k + 1$ staat het getal n, in kolom $k + 2$ het getal $n - 1$, et cetera, tot en met in kolom n het getal $k + 1$. We kunnen de rij dus in twee blokken verdelen (de eerste k en de laatste $n - k$ vakjes), waarbij in elk van beide blokken de kolomnummers van links naar rechts precies de getallen van rechts naar links zijn. Stel dat zo'n blok uit een oneven aantal vakjes bestaat. Dan is het getal in het middelste vakje precies gelijk aan het kolomnummer, en hebben de vakjes links daarvan een getal groter dan het kolomnummer, terwijl de vakjes rechts daarvan juist een getal kleiner dan het kolomnummer hebben.

Als zo'n blok juist uit een even aantal vakjes bestaat, dan heeft de eerste helft van de vakjes een getal groter dan het kolomnummer en de tweede helft juist een getal kleiner dan het kolomnummer.

Omdat de twee blokken samen n, een oneven aantal, vakjes hebben, bevat het ene blok een oneven aantal vakjes, zeg $2s + 1$, en het andere blok juist een even aantal vakjes, zeg $2t$, waarbij s en t afhankelijk zijn van welke rij we bekijken. Er geldt dan natuurlijk dat $(2s + 1) + 2t = n$. Het aantal blauwe vakjes op deze rij is nu s in het ene (oneven) blok en t in het andere (even) blok. Er zijn op deze rij dus $s + t$ blauwe vakjes. En dat is inderdaad $\frac{1}{2}(n-1)$, want $\frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}((2s+1+2t)-1) = \frac{1}{2}(2s+2t) = s + t$. We hebben hiermee ook de voorbeelden voor $n = 5$ en $n = 11$ gegeneraliseerd, want we hebben nu bewezen dat we voor alle oneven n de getallen zo kunnen neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden.

WINNAARS Bij deze opgave hebben de deelnemers gemiddeld 8,5 van de 10 punten behaald. Het was daarmee de best gemaakte opgave van de finale 2012. De vijftien prijswinnaars zijn:

Klas 6: Matthijs Lip (Gymnasium Camphusianum Gorinchem), Mathijs Pater (St. Bonifatiuscollege Utrecht), Jeroen Huijben (Theresia Lyceum Tilburg), Lars Ran (Montessori College Twente), Djurre Tijsma (Christelijk Gymnasium Beyers Naudé Leeuwarden).

Klas 5: Tysger Boelens (RSG Ter Apel), Michelle Sweering (Erasmiaans Gymnasium Rotterdam), Jeroen Winkel (Stedelijk Gymnasium Nijmegen), Bas Verseveldt (Theresia Lyceum Tilburg), Thijs Douwes (Revius Lyceum Doorn).

Klas 2, 3, 4: Bob Zwetsloot (Teylingen College Noordwijkerhout), Pepijn de Maat (Christelijk Gymnasium Utrecht), Peter van der Plas (Gymnasium Juvenaat Bergen op Zoom), Joris Gerlagh (Theresia Lyceum Tilburg), Maaike Los (Gomaruscollege Groningen). ■